## I.E $SO(3)$ et les quaternions

**Théorème 6:**

Soit $G$ le groupe des quaternions de norme 1. On a l'isomorphisme suivant :

$$G/\{-1,1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

On note $N$ la norme qui est une forme quadratique réelle associée à la forme polaire $q_1, q_2 \mapsto \frac{1}{2}(q_1\overline{q_2} + q_2\overline{q_1})$. C'est évidemment une forme quadratique non dégénérée.

$$G = \{q \in \mathbb{H} \quad / \quad N(q) = q\overline{q} = 1\} \simeq \mathbb{S}^3$$

*Démonstration.* Comme $\mathbb{H}$ n'est pas commutatif, l'idée est de faire agir $G$ sur le corps des quaternions $\mathbb{H}$ par automorphisme intérieur (action par conjugaison). L'idée de la preuve est de se rapprocher pas à pas de $SO(3)$, en commençant par aller dans $O(4)$ puis en décomposant $\mathbb{H}$ pour aller dans $O(3)$, utiliser la connexité de $\mathbb{S}^4$pour être dans $SO(3)$ et enfin utiliser les générateurs de $SO(3)$ pour conclure que c'est $SO(3)$.

1. Soit $S_q$ la conjugaison par $q$ dans $\mathbb{H}$.
   Soit $q \in G$. On a :
   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathbb{H} \\ q' & \mapsto & qq'\overline{q} = qq'q^{-1} \end{array}$$
   C'est une application $\mathbb{R}$-linéaire. Comme de plus $S_{\overline{q}} = (S_q)^{-1}$, elle est bijective. Notons tout de suite une autre relation importante $S_{q_1q_2} = S_{q_1} \circ S_{q_2}$ :
   $$S_{q_1q_2}(q) = q_1 \ q_2 \ q \ \overline{q_1} \ \overline{q_2} = S_{q_1}(S_{q_2}(q)).$$
   Nous avons en outre, puisque $q \in G$ :
   $$N(S_q(q')) = N(q \ q' \ \overline{q}) = \underbrace{N(q)}_{=1} N(q') \underbrace{N(\overline{q})}_{=1} = N(q').$$
   Donc $S_q \in O(N) \simeq O(4)$ pour tout $q \in G$.
2. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des quaternions purs, alors $\mathbb{H} = \mathbb{R} \bigoplus^N \mathbb{P}$ mais par $\mathbb{R}$-linéarité il vient alors que $S_{q|\mathbb{R}} = \mathrm{id}_\mathbb{R}$. Donc $S_q(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$ et on désigne alors par $s_q$ le $\mathbb{R}$-endomorphisme induit sur $\mathbb{P}$. On a donc $s_q \in O(N_{|\mathbb{P}}) \simeq O(3)$.
3. Soit $s$ : $\begin{array}{ccc} G & \to & O(3) \\ q & \mapsto & s_q \end{array}$. C'est un morphisme de groupe par la propriété importante remarquée dans la première partie. On va utiliser le théorème d'isomorphisme pour conclure.

   $$\ker(s) = \{q \in G \quad / \quad s_q = \mathrm{id}\} = \{q \in G \quad / \quad q \in Z(G)\} = G \cap \mathbb{R} = \{+1, -1\}.$$

   Munissons maintenant $O(3)$ de sa topologie usuelle (sous-espace de $\mathbb{R}^9$). En écrivant $s_q$ dans la base $(i, j, k)$, si on note $q = a + ib + jk + kd$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}^4$, on constate que $s_q(i), s_q(j), s_q(k)$ sont des polynômes de degré 2 en $a, b, c, d$. Donc $s$ est une application polynomiale en les composantes de $q$, et donc $s$ est continue.

   Il résulte de cela que $\det \circ s : G \to \{-1, +1\}$ est une application continue. Or $G \simeq \mathbb{S}^3$ est connexe et la connexité est préservée par image continue et $s(1) = \mathrm{id}$. Donc $\det \circ s(G) = \{1\}$ et donc $S(G) \subset SO(3) \simeq SO(P)$.

4. Pour conclure il reste à montrer que $s(G)$ contient un système de générateurs de $SO(3)$ (les retournements).

   Soit $p \in \mathbb{P} \cap G$ (un axe normalisé). Alors $s_p(p) = p \overbrace{p\,\overline{p}}^{=N(p)=1} = p$. Donc $s_p$ est une rotation d'axe $p$ (on sait que $s_p \in SO(3)$). Mais $p \in \mathbb{P} \implies \overline{p} = -p$ puis $p \in G \implies p^2 = -p\overline{p} = -1$ donc $(s_p)^2 = s_{p^2} = s_{-1} = \mathrm{id}$.

   On a donc obtenu que $s_p$ est une rotation d'axe $p$ et est une involution, donc est d'ordre 1 ou 2. C'est donc l'identité ou un retournement (d'axe $p$).
   Or si $\mathbb{P}\backslash\{0\} \ni q \perp p$ i.e. $q\overline{p} + p\overline{q} = 0$ i.e. $-qp - pq = 0$ ; alors $s_p(q) = pqp^{-1} = pq\overline{p} = -q$. Donc $s_p$ n'est pas triviale et c'est donc un retournement d'axe $p$.
   Or ceci vaut pour tout $p \in \mathbb{P}\backslash\{0\}$. Donc $s(G)$ contient tous les retournements dans $SO(3)$, mais puisque $SO(3)$ est engendré par les retournements, on a donc $s(G) \simeq SO(3)$.
   D'où finalement le résultat avancé en utilisant le théorème d'isomorphisme.

■